

Lineare Algebra und analytische Geometrie I**Arbeitsblatt 3****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 3.1. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Übungsaufgaben

AUFGABE 3.2. Betrachte die ganzen Zahlen \mathbb{Z} mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

AUFGABE 3.3. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \longmapsto \min(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

AUFGABE 3.4. Es sei S eine Menge und

$$G = \{F : S \rightarrow S \mid F \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass G mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist.

AUFGABE 3.5.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

AUFGABE 3.6. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

AUFGABE 3.7. Man konstruiere eine Gruppe mit drei Elementen.

AUFGABE 3.8. Sei R ein Ring und seien \spadesuit, \heartsuit und \clubsuit Elemente in R . Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2)(2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit)(1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit).$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

AUFGABE 3.9. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^n a_i f^i + \sum_{j=0}^m b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\sum_{i=0}^n a_i f^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j f^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^n a_r b_{k-r}.$$

AUFGABE 3.10.*

Beweise die allgemeine binomische Formel, also die Formel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $a, b \in K$ in einem Körper K .

AUFGABE 3.11. Sei R ein Ring und M eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge

$$A = \{f : M \rightarrow R \mid f \text{ Abbildung}\}$$

eine Ringstruktur.

AUFGABE 3.12. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

$$(1) \frac{x}{1} = x, \quad (2) \frac{1}{-1} = -1, \quad (3) \frac{0}{z} = 0, \quad (4) \frac{z}{z} = 1, \quad (5) \frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$

$$(6) \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}, \quad (7) \frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.13. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.14. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

AUFGABE 3.15. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

AUFGABE 3.16. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n + 1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n + m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen \mathbb{Z} und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

AUFGABE 3.17. Skizziere den Graphen der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graphen der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

AUFGABE 3.18. Es sei K ein Körper mit

$$2 \neq 0.$$

Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4} ((f + g)^2 - (f - g)^2)$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 3.19. (3 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt \cap als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 3.20. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a: K \longrightarrow K, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K, b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b: K \longrightarrow K, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

AUFGABE 3.21. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

AUFGABE 3.22. (6 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

AUFGABE 3.23. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0),$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.